Les Intégrales

Exercices résolus

Exercice 01 :

Calculer les primitives suivantes :

I=$\int (cosx)^{19} sinxdx$; I=$\int x^2\ lnxdx$; I=$\int \frac{2x}{1+x^4}dx$; I=$\int \frac{1}{4+x^2}dx$;

I=$\int e^x cosxdx$; I=$\int \frac{dx}{x(lnx)^3}dx$; I=$\int \frac{1}{xlnx}dx$;I=$\int \frac{1}{3+e^{-x}}dx$;

I=$\int arctg(x)dx$; I=$\int lnxdx$; I=$\int x^2\ (1+x^3)^2 dx$.

Reponse 01 :

I=$-\int (cosx)^{19}\ (cosx)'dx$=$-\frac{1}{20}(cosx)^{20}$+c, c$\in \mathbb{R}$;

I=$\int x^2\ lnxdx$ =$\frac{1}{3}x^3 lnx - \int \frac{1}{3}x^3(\frac{1}{x})dx$= $\frac{1}{3}x^3 lnx - \frac{1}{9}x^3 + C$;

I=$\int \frac{2x}{1+x^4}dx$; on pose : t=x^2 ainsi dt =$(2xdx)$ et I=$\int \frac{1}{1+t^2}dt$=arctg$(t)+c$=arctg$(x^2)+dx$

I=$\int \frac{1}{4+x^2}dx$= $\frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}dx$; on pose t=$\left(\frac{x}{2}\right)$ ainsi dx=$(2dt)$ et I=$\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right)+c$

I=$\int e^x cosxdx$; par partie u =$cosx$, v'=e^x ainsi I=$e^x cosx - \int -e^x\ sinxdx$

Une autre foi par partie f=sin x, g'=e^x

I=$e^x cosx + e^x sinx - \int e^x cosxdx$ donc : I=$\frac{1}{2}e^x(cosx+sinx)+c$,

I=$\int \frac{dx}{x(lnx)^3}$, on pose t=ln(x); $dt=\frac{1}{x}dx$ ainsi : I=$\int \frac{dt}{t^3} = \frac{-1}{2}t^{-2}+c = \frac{-1}{2(lnx)^2}+c$

I=$\int \frac{1}{xlnx}dx$, on pose t=ln(x) ;$dt=\frac{1}{x}dx$ ainsi : I=$\int \frac{1}{t}dt$=ln$(t)+c = \ln((lnx)+c$

I=$\int \frac{1}{3+e^{-x}}dx$, on pose t=e^x ; dt=$e^x dx$ ainsi :I=$\int \frac{1}{3+\frac{1}{t}}\left(\frac{1}{t}\right)dt$=$\int \frac{1}{3t+1}dt = \frac{1}{3}\ln(3t+1)+c$

$= \frac{1}{3}\ln(3e^x+1)+c, c\in\mathbb{R}$

I=$\int arctg(x)dx$; par partie u'=1, v= arctg(x) ainsi :I=$xarctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2}dx$ =

I=$xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$

I=$\int lnxdx$; par partie u'=1, v=ln(x)ainsi :I=$xlnx - \int dx = xlnx - x + c, c\in\mathbb{R}$

I=$\int x^2\,(1+x^3)^2dx$; on pose u=$(1+x^3)$, du=$3x^2dx$ ainsi :I=$\int \frac{1}{3}u^2du$=$\frac{1}{9}u^3+c=\frac{1}{9}(1+x^3)^3+c$.

Exercice 02 :

Calculer les primitives suivantes :

I=$\int \frac{x^2+\sqrt{x^3}+3}{\sqrt{x}}dx$; I=$\int \frac{x^4}{x-1}dx$; I=$\int \frac{1-3x}{(1+3x)(1-x)}dx$.

Reponse 02 :

I=$\int(x^{\frac{3}{2}}+x+3x^{\frac{-1}{2)}})dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^2+6\sqrt{x}+c, c\in\mathbb{R}$

I=$\int \frac{x^4}{x-1}dx=\int(x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x-1})dx$ $=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln(x-1)+c, c\in\mathbb{R}$

I=$\int \frac{1-3x}{(1+3x)(1-x)}dx=\int(\frac{a}{1+3x}+\frac{b}{1-x})dx$, par identification on trouve :a= $\frac{3}{2}$ b=$\frac{-1}{2}$

Ainsi : I=$\frac{3}{2}\int\frac{dx}{1+3x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x}$=$\frac{1}{2}\ln(1+3x)+\frac{1}{2}\ln(1-x)+c\,, c\in\mathbb{R}$

Exercice 03 :

1-déterminer : a et b tels que : $(x+b)^2+a^2=x^2-x+1$

Calculer l'intégrale J=$\int\frac{1}{x^2-x+1}dx$

2-vérifier que : 1+$\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

Calculer l'intégrale I= $\int\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}dx$

Reponse 03 :

1-Apres identification on trouve a = (+ $\frac{\sqrt{3}}{2}$) ou (- $\frac{\sqrt{3}}{2}$) et b= $(-\frac{1}{2})$

Ainsi : J= $\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx$=$\int\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}dt$;tel que t=$(x-\frac{1}{2})$ et $dt=dx$

J= $\frac{4}{3}\int\frac{1}{(\frac{2t}{\sqrt{3}})^2+1}dt$=$\frac{4}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)dt+c=\frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c, c\in\mathbb{R}$.

2- la division Euclidien donne :$\frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$=1+$\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}$

Ainsi : I= $\int(1+\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2-x+1})dx=x+\ln(x^2-x+1)$ +J

Et : I $= x + \ln(x^2 - x + 1) + \frac{2\sqrt{3}}{3} arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c, c \in \mathbb{R}$.